Краткие сообщения ОИЯИ №14-86 *JINR Rapid Communications No.14-86*
УДК 539.12.01

КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ СКИРМА С НАРУШЕННОЙ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В.А.Николаев, Э.Рока*

Проведено квантование модели Скирма с нарушенной киральной симметрией методом коллективных переменных. Коллективные переменные соответствуют вибрациям и вращениям скирмиона. Полученный спектр масс обнаруживает вырождение некоторых состояний по энергии.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Quantization in Skyrme Model with Broken Chiral Symmetry

V.A.Nikolaev, E.Roca

The quantization in Skyrme model with broken chiral symmetry is performed by the method of collective variables. The collective variables correspond to vibrations and rotations of skyrmions. The computed spectra of masses show the energy degeneracy of some states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. В работах [1,2] была предложена модель единого описания источника и поля мезонов. Лагранжиан самодействующего мезонного поля модели приводит к нелинейному дифференциальному уравнению, солитоны которого ассоциируются с классическими аналогами барионов. Солитоны характеризуются целочисленной степенью отображения /реализуемого полями/ $S^3 \to S^3$, называемой топологическим зарядом. Топологический заряд, в свою очередь, отождествляется с барионным зарядом [2]. Квантование модели проводится путем введения коллективных координат, описывающих вращение в изотопическом пространстве [3] и сферически симметричные вибрации в окрестности статических решений классических уравнений [4]. Были сделаны первые расчеты статических характеристик барионов [3] и предпринят опыт расчета нуклон-нуклонного потенциала [5].

*Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Цель настоящей работы - получить квантовый гамильтониан с учетом связи вибраций и вращений скирмиона, а также наличия нарушающего киральную инвариантность мезонного массового члена. Мы приведем некоторые результаты, касающиеся спектра масс.

2. Модель Скирма определяется плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16} F_\pi^2 \, \mathrm{Tr} L_\mu L_\mu + \frac{1}{32 e^2} \mathrm{Tr}[L_\mu, L_\nu]^2 , \qquad /1/$$

выраженного через токи $L_\mu = U^+ \partial_\mu U$ кирального поля $U(\vec{r}, t) = \exp[i 2\vec{\tau}\vec{\pi}(\vec{r}, t)/F_\pi]$, где $\vec{\pi}(\vec{r})$ - псевдоскалярный изотриплет пионных полей, а τ_i - 2х2-матрицы Паули. Входящие в лагранжиан постоянные F_π и е - суть постоянная пионного распада /$F_\pi \approx 186$ МэВ/ и феноменологический параметр е. Сферически симметричный анзац /3/ $U(\vec{r}) = \exp[i\vec{\tau}\vec{n}\theta(\vec{r})]$, где $\vec{n}$ - единичный вектор $\vec{n} = \vec{r}/r$, и лагранжева плотность /1/ приводят к статическому нелинейному дифференциальному уравнению на киральный угол $\theta(r)$, определяющему модуль пионного поля:

$$(\tilde{r}^2 + 8\sin^2\theta)\theta'' + 2\tilde{r}\theta' + 4\sin 2\theta \cdot (\theta')^2 - \sin 2\theta - \frac{4\sin^2\theta \cdot \sin 2\theta}{\tilde{r}^2} = 0 . \qquad /2/$$

В уравнении /2/ $\tilde{r} = eF_\pi r$ - безразмерная переменная, а штрих соответствует производной по радиусу. Решение уравнения /2/ с граничными условиями $\theta(0) = \pi$, $\theta(\infty) = 0$ минимизирует массу классического солитона, имеет асимптотическое поведение $\theta(\tilde{r}) \sim 1/\tilde{r}^2$ при $\tilde{r} \to \infty$ и соответствует классическому объекту с единичным барионным зарядом.

3. Если к лагранжиану Скирма добавить член $\mathcal{L}_\pi$ /6/, соответствующий ненулевой массе π-мезона m_π: $\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{8} m_\pi^2 F_\pi^2 (\mathrm{Tr}\, U - 2)$, то получим уравнение, отличающееся от /2/ дополнительным членом $-4m_\pi^2 \tilde{r}^2 \sin^2\theta / e^2 F_\pi^2$ в левой части уравнения. Асимптотика решения последнего уравнения теперь:

$$\theta(\tilde{r}) \underset{\tilde{r}\to\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{m_\pi}{eF_\pi}\tilde{r}}}{\frac{m_\pi}{eF_\pi}\cdot\tilde{r}} \left(1 + \frac{1}{\frac{m_\pi}{eF_\pi}\cdot\tilde{r}}\right). \qquad /3/$$

При этом энергия скирмиона М имеет вид

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F_\pi}{e} \int_0^\infty \tilde{r}^2 d\tilde{r} \left[\frac{2\sin^2\theta}{\tilde{r}^2} + (\theta')^2\right] + \frac{2\pi F_\pi}{e} \int_0^\infty d\tilde{r} \sin^2\theta \left[2(\theta')^2 + \frac{\sin^2\theta}{\tilde{r}^2}\right] +$$

$$+\frac{m^2}{e^3F_\pi}\cdot\pi\int_0^\infty \tilde r^{\,2}d\tilde r(1-\cos\theta(\tilde r)) \, . \qquad /4/$$

4. Введение коллективных переменных, соответствующих вибрациям и вращению, можно сделать как в /4/, выбрав $U(\vec r, t)$ в виде

$$U(\vec r,\ t) = A(t)\,U_0\,(\vec r e^{\lambda(t)})\,A^+(t)\, . \qquad /5/$$

Здесь статическое решение $U_0(\vec r)$ подвергается масштабному преобразованию и вращению, зависящим от времени. Унитарная 2x2-матрица $A(t)$ в параметризации Эйлера - Родригеса представима в виде $A(t) = a_0\cdot I + i(\vec\tau\vec a)$. Параметры a_0 и $\vec a$ лежат на сфере S^3 4-мерного пространства. Выделяя зависящие от времени члены лагранжиана, перепишем его в форме

$$L = -M - \frac{1}{16}F_\pi^2\int Tr(\vec L_0, \vec L_0) - \frac{2}{32e^2}\int Tr[\vec L_k\times\vec L_0]^2 d^3r\, . \qquad /6/$$

В выражении /6/ изотопические векторы $\vec L_\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ определены так, что $L_\mu = (i\vec\tau, L_\mu)$. Индекс $k = 1,2,3$, а M описывает "классическую" часть массы (см.уравнение /4/). Величины $(\vec L_0)^2$ и $(\vec L_0\times\vec L_k)^2$ можно представить в виде, где явно выделена чисто вибрационная часть:

$$(\vec L_0)^2 = \frac{8}{3}\sin^2\theta(re^\lambda)\cdot\vec J_1^{\,2} + (\theta')^2 r^2 e^{2\lambda}(\dot\lambda)^2\ , \qquad /7/$$

$$[\vec L_0\times\vec L_k]^2 = e^{2\lambda}\cdot\frac{4}{3}\vec J_1^{\,2}\{2\sin^2\theta(re^\lambda)[\frac{d\theta}{d(re^\lambda)} + \frac{\sin^2\theta}{(re^\lambda)^2}]\} +$$

$$+ 2(\dot\lambda)^2 e^{2\lambda}(\theta')^2\sin^2\theta\, . \qquad /8/$$

Вектор $\vec J_1 = a_0\dot{\vec a} - \dot a_0\vec a + \vec a\times\dot{\vec a}$ и связанный с ним некоторой ортогональной матрицей вектор $\vec J_2 = \dot a_0\vec a - a_0\dot{\vec a} + \vec a\times\dot{\vec a}$ порождают при квантовании операторы изоспина и спина. Гамильтониан, получаемый после канонического преобразования, в обозначениях /4/ запишется в виде

$$H = \frac{p_\lambda^2}{2A(\lambda)} + B(\lambda) + \frac{1}{4C(\lambda)}\sum_{i=0}^{3}\pi_i^2\ , \qquad /9/$$

где $p_\lambda = A(\lambda)\dot\lambda$, $\pi_i = 2C(\lambda)\dot a_i$ - сопряженные импульсы. Здесь "эффективная масса" $A(\lambda) = \exp(-3\lambda)Q_2 + \exp(-\lambda)Q_4$,

$$Q_2 = \frac{\pi}{e^3 F_\pi} \int\limits_0^\infty (\theta')^2 \tilde{r}^2 d\tilde{r}, \quad Q_4 = \frac{8\pi}{e^3 F_\pi} \int\limits_0^\infty (\theta')^2 \tilde{r}^2 \sin^2\theta \, d\tilde{r}. \qquad /10/$$

Потенциал $B(\lambda) = V_2 \exp(-\lambda) + V_4 \exp(\lambda)$, а V_2 и V_4 - первый и второй интегралы, входящие в /4/. Определяющая момент инерции функция $C(\lambda)$ дается выражением $C(\lambda) = I_2 \cdot \exp(-3\lambda) + I_4 \exp(-\lambda)$, а интегралы I_2 и I_4 равны соответственно

$$I_2 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{e^3 F_\pi}\right) \int\limits_0^\infty \tilde{r}^2 \sin^2\theta \, d\tilde{r}, \qquad /11/$$

$$I_4 = \frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{e^3 F_\pi}\right) \int\limits_0^\infty \left[(\theta')^2 + \frac{\sin^2\theta}{\tilde{r}^2}\right] \tilde{r}^2 \sin^2\theta \, d\tilde{r}. \qquad /12/$$

Заменив канонически-сопряженные импульсы в гамильтониане операторными величинами $\pi_i \Rightarrow -i\partial/\partial a_i$, $p_\lambda \Rightarrow -i\partial/\partial\lambda$, получим гамильтониан квантовой задачи. Последний можно диагонализовать на $D^J_{T_z J_z}$ -собственных функциях спина J и изоспина T с $T=J$, проекциями J_z и T_z и получить эффективный гамильтониан для вибрационной степени свободы λ:

$$H = \frac{\hat{p}_\lambda^2}{2A(\lambda)} + V(J,\lambda), \text{ где } V(J,\lambda) = B(\lambda) + \frac{J(J+1)}{C(\lambda)}. \qquad /13/$$

Для нахождения спектра масс следует решить уравнение Шредингера с этим гамильтонианом. Приведем функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, полученные взятием безразмерных интегралов для случая $m_\pi = 139$ МэВ:

$$A(\lambda) = \frac{1}{e^3 F_\pi}\left(266{,}48\, e^{-3\lambda} + 87{,}15\, e^{-\lambda}\right), \qquad /14/$$

$$B(\lambda) = \frac{F_\pi}{e}\left(17{,}89\, e^{-\lambda} + 18{,}63\, e^{\lambda} + 0{,}28\, e^{-3\lambda}\right), \qquad /15/$$

$$C(\lambda) = \frac{4\pi}{3e^3 F_\pi}\left(21{,}86\, e^{-3\lambda} + 20{,}82\, e^{-\lambda}\right). \qquad /16/$$

Этими выражениями заканчивается вычисление гамильтониана квантовой задачи. Соответствующие функции для $m_\pi = 0$ можно найти в /4/. Использованное в /4/ гармоническое приближение предполагает разложение $V(\lambda, J)$ до второго порядка по λ

и взятие $A(\lambda)$ при значении λ, соответствующем минимуму потенциала.

Приведем значения масс $E_{n,T=J}$ некоторых состояний, полученных с использованием гармонического приближения /вторая колонка таблицы/, в точном расчете /третья колонка таблицы/ и расчете с m_π=139 МэВ /четвертая колонка таблицы/.

Таблица

$E_{n,T=J}$	Гармоническое приближение $m_\pi=0$	Точный расчет $m_\pi=0$	Точный расчет m_π=139 МэВ
$E_{0,1/2}$	1172 МэВ	1163 МэВ	1262 МэВ
$E_{1,1/2}$	1553	1470	1663
$E_{0,3/2}$	1473	1465	1665
$E_{1,3/2}$	1774	1721	2029

Расчет проведен для экспериментального значения F_π=186 МэВ и постоянной e=9,42. Значение постоянной e соответствует экспериментальной разности масс N и Δ-резонансов. Из таблицы видно, что состояния $|0,3/2\rangle$ и $|1,1/2\rangle$ вырождены по энергии. Как известно, экспериментально эти уровни отстоят друг от друга приблизительно на 230 МэВ. Включение массового пионного члена сдвигает спектр вверх, но не снимает этого вырождения. Чтобы убедиться, что такое неявное вырождение присуще рассматриваемой модели, необходимо выполнить расчеты при других значениях константы e, что планируется сделать в отдельной работе.

Авторы благодарны профессору В.К.Лукьянову за поддержку работы и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Skyrme T.H.R., Proc.R.Soc., 1961, A260, p.127.
2. Skyrme T.H.R., Nucl.Phys., 1962, 31, p.556.
3. Adkins G., Nappi C., Witten E., Nucl.Phys., 1983, B228, p.552.
4. Biedenharn L.C., Dothan Y., Tarlini M., Phys.Rev. 1985, D31, p.649.
5. Jackson A., Jackson A.D., Pasquier V., Nucl.Phys., 1985, A432, p.567.
6. Adkins G., Nappi C., Nucl.Phys., 1984, B223, p.109.

Рукопись поступила 17 января 1986 года.